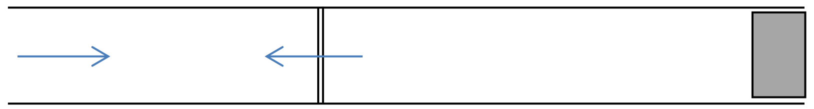
Mécanique des fluides compressibles

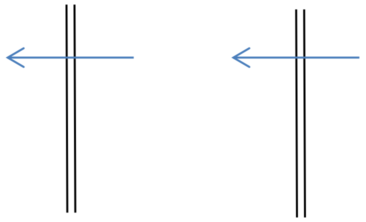
Exercice 7.9

De l'air s'écoule dans une conduite rectiligne à une température de 300 K, une pression de 1 atm, et une vitesse de 60 m/s. A un instant particulier, une vanne est fermée en bout de conduite. Un choc remonte alors la conduite. Trouver la vitesse du choc ainsi que la température et la pression derrière le choc (cad entre le choc et la vanne).



Exercice 7.10

Deux ondes de chocs se suivent (voir schéma ci-dessous). En utilisant les principes associés aux ondes de chocs, dire si au cours du temps l'écart entre les deux chocs augmente, diminue, ou reste le même.

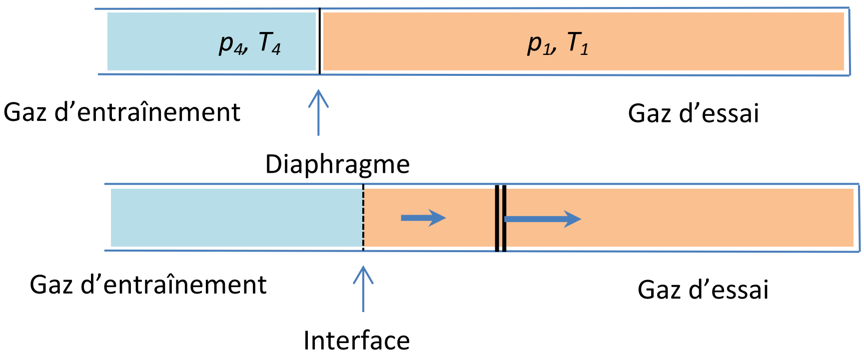


Exercices Complémentaires

Exercice 7.11

Tube à choc

Un tube à choc est une conduite cylindrique constitué de deux parties contenant différents gaz: une partie remplie du « driver gas » (gaz d'entraînement) et une autre de « test gas » (gaz d'essai). Le gaz d'entraînement est porté à très haute pression (par un compresseur ou un piston). Un diaphragme sépare les deux portions de gaz. Le diaphragme peut être brisé par une impulsion électrique ou par simple effort mécanique. Quand le diaphragme se brise, une onde de choc est générée à cause de la différence de pression entre les deux gaz, et se propage dans le gaz d'essai (d'autres phénomènes se produisent, comme la formation d'une onde de détente se propageant en sens opposé dans le gaz d'entraînement, ainsi que le déplacement de l'interface entre les deux gaz).



a. Avec la théorie des écoulements compressibles *instationnaires*, il est possible de montrer qu'il existe une relation entre le nombre de Mach du choc M_s (rapport de sa vitesse u_s et de la vitesse du son dans le gaz d'essai), les pressions et vitesses du son initiales dans le gaz d'essai (p_1, a_1) et dans gaz d'entraînement (p_4, a_4) :

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{2\gamma_1 M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1}\left[1 - \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\frac{a_1}{a_4}\left(M_s - \frac{1}{M_s}\right)\right]^{-\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$

Montrer que pour un rapport de pression très élevé, on a :

$$M_s \approx \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1}\frac{a_4}{a_1}$$

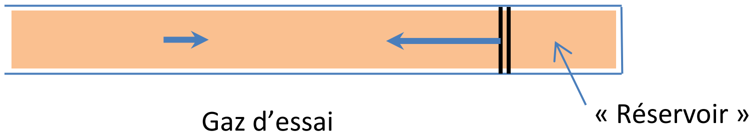
Enoncer ainsi les conditions sur le gaz d'entraînement permettant de générer un choc de grande intensité (M_s grand).

Application numérique (tube à choc T5, Caltech):

- Gaz d'entraînement : hélium, p_4 = 110 MPa, T_4 = 4'600 K (valeurs obtenues par compression par piston) ;
- Gaz d'essai : air, p_1 = 90 kPa, T_1 = 300 K (on prendra $\gamma_{air} = const = 1.4$).

Trouver le nombre de Mach du choc et sa vitesse, ainsi que la vitesse du gaz (d'essai) et ses conditions thermodynamiques *juste derrière* le choc (attention : ce ne sont pas les conditions d'indice « 4 »).

b. Le choc arrive en fin de conduite et est réfléchi. La zône entre le choc et la fin de conduite peut être utilisée comme « réservoir » pour une tuyère hypersonique.



Trouver la pression et la température de réservoir p_0 et T_0 (encore une fois, on suppose que γ reste constant, égal à 1.4 ; il faudrait le faire varier avec la trempérature…).

Exercice 7.12

Explosion

1. Une explosion génère une onde de choc sphérique dont le rayon *R* grandit en fonction du temps dans une atmosphère au repos (de masse volumique ρ_0).
   a. Si les paramètres essentiels caractérisant l'onde de choc sont son rayon, la masse volumique de l'air ambiant, l'énergie E de l'explosion (en joule), et l'instant d'observation t, utiliser une analyse dimensionnelle (théorème de Pi) pour montrer:

   $$\frac{R}{\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5}} = const.$$

   Une analyse plus étendue montre que la constante est proche de 1.

   b. Montrer à partir de cette expression que la vitesse de l'onde de choc est :

   $$U = \frac{2}{5}\frac{R}{t}$$

   c. A partir de la relation du rapport de pression en fonction du nombre de Mach pour un choc normal, montrer que la pression derrière un <u>choc fort</u> (en négligeant la pression atmosphérique) est donnée approximativement par :

   $$p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 U^2$$

   d. Exprimer cette pression en fonction du rayon du choc et de l'énergie de l'explosion:

   $$p = \frac{8}{25}\frac{1}{\gamma+1}\frac{E}{R^3}$$

   e. Evaluer *p* pour les cas suivants (on prendra 1 gramme de TNT égal à 4'184 joule) :
      i. Grenade à main : E = 57 grammes de TNT, R = 10 m, R = 100 m, et R = 1 km
      ii. Bombe à hydrogène : E = 25 mégatonnes de TNT, R = 1 km, R = 10 km et R = 100 km
      iii. Impact météoritique de Chicxulub dans le Yucatan il y a 65 millions d'années : E = 96 millions de mégatonnes de TNT, R = 1'000 km et R = 10'000 km (bien que, vu l'épaisseur faible de l'atmosphère, l'onde de choc n'était sans doute pas sphérique).

Exercice 7.13

Epaisseur d'une onde choc droite (on omettra l'indice « n » pour alléger la notation)

En faisant l'hypothèse que le fluide est continu à travers une onde de choc (hypothèse osée !), il est possible d'écrire l'équation de Navier-Stokes le long de l'écoulement (coordonnée x) :

$$\rho w \frac{dw}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{4}{3}\mu'\right)\frac{dw}{dx}\right]$$

où w est la vitesse de l'écoulement, p la pression, et

$$\frac{4}{3}\mu' = \frac{4}{3}\mu + \mu_v$$

avec μ la viscosité (dynamique) et μ_v la viscosité de volume.

a. Montrer que l'on peut intégrer l'équation de Navier-Stokes et obtenir :

$$\rho w w = -p + \left(\frac{4}{3}\mu'\right)\frac{dw}{dx} + const.$$

Montrer ainsi que l'on a :

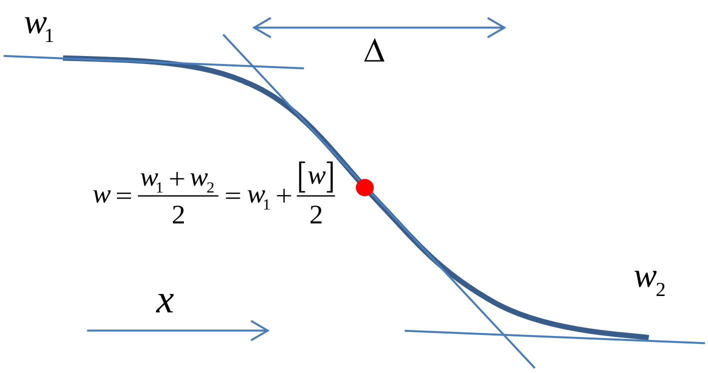
$$\frac{4}{3}\mu' \frac{dw}{dx} = \rho_1 w_1 (w - w_1) + p - p_1$$

b. Pour un profil de vitesse dans le choc donné sur le schéma ci-dessous, on peut estimer l'épaisseur du choc Δ en considérant la valeur de la pente du profil de vitesse au milieu du choc :

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{w=\frac{w_1+w_2}{2}} \approx \frac{w_2 - w_1}{\Delta} = \frac{[w]}{\Delta}.$$

Montrer alors que :

$$\frac{4}{3}\mu' \frac{[w]}{\Delta} = \rho_1 w_1 \frac{[w]}{2} + (p - p_1)_{w=\frac{w_1+w_2}{2}}$$



c. Dans la relation précédente, il suffit d'estimer la pression au milieu du choc pour obtenir une estimation de l'épaisseur du choc. Un développement de Taylor sur $p(v,s)$ pour un **choc faible** fournit le résultat suivant

$$p - p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s (v - v_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s (v - v_1)^2 + O\left[(v - v_1)^3\right]$$

On néglige le développement en s (entropie) car les termes en $(s-s_1)$ varient comme $(p-p_1)^3$ (voir cours), et donc comme $(v-v_1)^3$.

Montrer que : $v-v_1=\dfrac{[w]}{2\rho_1 w_1}$

et qu'ainsi : $p-p_1=-\rho_1 a_1^2\dfrac{[w]}{2w_1}+\rho_1 a_1^2\Gamma_1\dfrac{[w]^2}{4w_1^{\,2}}+O\left([w]^3\right)$

où on a déjà rencontré la dérivée fondamentale : $\Gamma\equiv\dfrac{a^4}{2v^3}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$.

d. Montrer ainsi que l'on a :

$$\frac{8}{3}\frac{\mu'}{\rho_1 a_1\Delta}=M_1-\frac{1}{M_1}+\frac{\Gamma_1[w]}{2M_1^2 a_1}+O\left([w]^2\right)$$

e. Montrer que pour un choc faible :

$$\frac{[w]}{a_1}=-\frac{2}{\Gamma_1}(M_1-1)+O\left[(M_1-1)^2\right]$$

f. Trouver finalement une expression pour l'épaisseur du choc :

$$\frac{8}{3}\frac{\mu'}{\rho_1 a_1\Delta}=M_1-1+O\left[(M_1-1)^2\right]$$

g. Evaluer l'épaisseur de l'onde pour les différents fluides de la table ci-dessous pour un nombre de Mach de 1.2.

Fluide	$\mu\times10^5\ [kg/(m\cdot s)]$	$\dfrac{\mu_v}{\mu}$	$\dfrac{\mu}{\rho}\times10^5\ [m^2/s]$	$a\ [m/s]$
He	1.98	0	12.2	1'007.4
H_2	.887	32	10.8	1'304.4
Air	1.85	0.6	1.57	343.3
Eau liquide	100.2	3.1	0.1	1'484
Glycérine	134'000	0.4	109	1'895

h. Pour des gaz raréfiés, la viscosité peut s'exprimer approximativement en fonction du parcours libre moyen Λ, de la masse volumique, et de la vitesse du son, selon :

$$\mu'\sim\rho_1 a_1\Lambda$$

Montrer ainsi :

$$\frac{\Delta}{\Lambda}\sim\frac{8}{3(M_1-1)}$$

Cette formule simple représente (étonnamment) bien les données expérimentales. Une analyse plus détaillée ferait intervenir les transmissions de chaleur (et donc le nombre de Prandtl).